SESSION 2000

Filière MP

MATHÉMATIQUES

(Épreuve commune aux ENS : Lyon et Cachan)

DURÉE : 4 heures

Calculatrices autorisées

Tournez la page S.V.P.

Les 3 parties II, III et IV sont des applications indépendantes de la partie I. Dans la partie préliminaire ainsi que dans la première partie, K désigne un corps qui peut-être quelconque. Dans les trois parties d'applications, K sera égal respectivement à $\mathbf{R}$, à $\mathbf{Q}(X)$, et enfin à $\mathbf{C}(X)$. L'anneau des polynômes à coefficients dans K sera le plus souvent noté $K[X]$; **cependant, il sera noté $K[Y]$ lorsque K sera lui même un corps de fractions rationnelles.**

D'autre part, soient m, n deux entiers naturels non-nuls. Si $P(X) = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ et $Q(X) = \sum_{j=0}^{m} b_j X^j$ sont deux éléments de $K[X]$ de degrés respectifs n et m, on appelle *résultant de P et Q* (noté $Res_K(P,Q)$, ou bien $Res(P,Q)$ si aucune confusion n'est possible) le déterminant de la matrice carrée à coefficients dans K de taille $(n+m, n+m)$ suivante, dite *matrice résultante* :

$$\begin{pmatrix}
a_0 & a_1 & a_2 & . & . & . & a_{n-1} & a_n & 0 & \cdots & 0 \\
0 & a_0 & a_1 & a_2 & . & . & . & a_{n-1} & a_n & 0 & 0 \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 0 \\
0 & \cdots & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & . & . & . & a_{n-1} & a_n \\
b_0 & b_1 & \cdots & b_{m-1} & b_m & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\
0 & b_0 & b_1 & \cdots & b_{m-1} & b_m & 0 & . & . & . & 0 \\
. & . & & & & & & & & & \\
. & & . & . & . & \cdots & . & . & \cdots & \cdots & . \\
. & & & . & & & & & & & \\
0 & . & . & 0 & b_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_{m-1} & b_m & 0 \\
0 & . & \cdots & . & 0 & b_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_{m-1} & b_m
\end{pmatrix}$$

où chaque a_i apparait exactement m fois, et chaque b_j apparait n fois. Noter que les m premiers coefficients diagonaux sont égaux à a_0, et que les n derniers sont égaux à b_m.

Enfin, si A est un sous-anneau de K, on notera $A[X]$ le sous-anneau de l'anneau des polynômes $K[X]$, constitué des polynômes dont tous les coefficients sont dans A.

0- Préliminaires. Soit A un sous-anneau de K.

0-1- Vérifier que $A[X]$ est bien un sous anneau de $K[X]$.

0-2- Montrer que si P, Q sont deux éléments de $A[X]$, alors $Res_K(P,Q)$ reste un élément de A.

0-3- Soit $\mathbf{C}[X][Y]$ le sous-anneau de l'anneau des polynômes $\mathbf{C}(X)[Y]$ sur le corps $\mathbf{C}(X)$ défini dans l'introduction pour $A = \mathbf{C}[X]$ et $K = \mathbf{C}(X)$. Montrer que tout élément P de $\mathbf{C}[X][Y]$ s'écrit de façon unique sous la forme $P(X,Y) = \sum_{i,j \geq 0} a_{i,j} X^i Y^j$, avec $a_{i,j} \in \mathbf{C}$ nul sauf pour un nombre fini de couples (i,j). En déduire que si $P \neq 0$ est un élément de $\mathbf{C}[X][Y]$ s'écrivant comme ci-dessus, alors le nombre $d(P) = Max\{i+j \mid a_{i,j} \neq 0\}$ est un entier naturel bien défini, appelé *degré total* de P.

I- La propriété fondamentale du résultant. Soient $P(X) = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ et $Q(X) = \sum_{j=0}^{m} b_j X^j$ deux polynômes de $K[X]$ de degrés n et m.

I-1- Montrer que les polynômes P et Q *ne sont pas* premiers entre eux dans $K[X]$ si, et seulement si, il existe deux polynômes A et B non-nuls de $K[X]$, de degrés $\deg A < m$ et $\deg B < n$, tels que $AP = BQ$.

I-2- On note $K[X]_d$ le sous espace vectoriel de $K[X]$ constitué des polynômes de degré inférieur ou égal à d.

I-2-a- Quelle est la dimension sur K de $K[X]_d$?

I-2-b- Soit f l'application

$$\begin{aligned} f : K[X]_{m-1} \times K[X]_{n-1} &\longrightarrow K[X]_{m+n-1} \\ (A, B) &\longrightarrow AP + BQ. \end{aligned}$$

Montrer que f est une application linéaire, et que sa matrice dans des bases ad-hoc que l'on précisera des espaces vectoriels source et but est la transposée de la matrice résultante de l'énoncé.

I-3- Montrer que P et Q sont premiers entre eux dans $K[X]$ si, et seulement si, $Res_K(P, Q) \neq 0$.

I-4- Montrer que pour tout λ non nul, on a

$$Res_{\mathbf{C}}(\lambda^n P(\frac{X}{\lambda}), \lambda^m Q(\frac{X}{\lambda})) = \lambda^{mn} Res_{\mathbf{C}}(P(X), Q(X)).$$

II- Une courbe unicursale. On considère la courbe plane de $\mathbf{R}^2$ paramétrée par $t \in \mathbf{R}$

$$\begin{cases} x(t) &= t^2 + t \\ y(t) &= t^3 + 2t^2. \end{cases}$$

Quelle est l'équation cartésienne de la courbe dans le plan ?

III- Entiers algébriques. On note $\mathcal{O}$ l'ensemble des nombres complexes z, pour lesquels il existe un polynôme non-nul $P(X) \in \mathbf{Z}[X]$ (l'anneau des polynômes à coefficients dans $\mathbf{Z}$), qui soit *unitaire* (c'est à dire par définition de coefficient dominant égal à 1), et vérifiant $P(z) = 0$.

III-1- Soient z_1 et z_2 des éléments de $\mathcal{O}$, annulant les polynômes P_1 et P_2 de degrés respectifs n_1 et n_2. Montrer que $Res_{\mathbf{Q}(X)}(P_1(X - Y), P_2(Y))$ est un élément de $\mathbf{Z}[X]$, unitaire de degré $n_1 n_2$, annulant la somme $z_1 + z_2$.

III-2- Montrer que $\mathcal{O}$ est un sous-anneau de $\mathbf{C}$.

IV- Équations algébriques : le théorème de Bézout faible.

On se donne deux polynômes P et Q non nuls de $\mathbf{C}[X][Y]$, et on se propose d'étudier le nombre de solutions (z_1, z_2) dans $\mathbf{C}^2$ du système d'équations

$$\begin{cases} P(z_1, z_2) &= 0 \\ Q(z_1, z_2) &= 0. \end{cases}$$

On considère les deux conditions suivantes sur P et Q :

(C_1) P et Q sont premiers entre eux dans l'anneau de polynômes $\mathbf{C}(X)[Y]$ à coefficients dans le corps $\mathbf{C}(X)$.

(C_2) En notant $P(X, Y) = \sum_{i=0}^{n} P_i(X) Y^i$ et $Q(X, Y) = \sum_{j=0}^{m} Q_j(X) Y^j$ avec $P_n(X) Q_m(X) \neq 0$ dans $\mathbf{C}[X]$, il n'y a aucun facteur non-constant commun aux $n + m + 2$ polynômes $P_0(X)$,$P_1(X)$, $\cdots$, $P_n(X)$, $Q_0(X), \cdots, Q_m(X)$ dans l'anneau des polynômes $\mathbf{C}[X]$.

Enfin, on note $d(P)$ et $d(Q)$ les degrés totaux de P et de Q définis en 0-3-.

IV-1- Exemples. Parmis les trois couples de polynômes suivants, lesquels vérifient *(C_1)* ? Lesquels vérifient *(C_2)* ? Quels sont leurs degrés totaux ?

$\left(P_1(X, Y) = XY^2 + X, Q_1(X, Y) = X^2 Y^3 + XY^2\right)$;

Tournez la page S.V.P.

$\big(P_2(X,Y) = XY^2 + X + 1, Q_2(X,Y) = Q_1(X,Y)\big)$;

$\big(P_3(X,Y) = Y + X, Q_3(X,Y) = X^2 - Y^2\big)$.

IV-2-a- On suppose que P et Q vérifient *(C1)*. Montrer qu'il existe trois polynômes non nuls $A, B \in \mathbf{C}[X][Y]$, et $C \in \mathbf{C}[X]$, tels que $AP + BQ = C$.

IV-2-b- En déduire que le système étudié n'a qu'un nombre fini de solutions si, et seulement si, P et Q vérifient *(C1)* et *(C2)*.

IV-3- Montrer que, par un changement de variables linéaire en (x, y), on peut se ramener au cas où $n = d(P)$ et $m = d(Q)$.

IV-4- On pose $R(X) = Res_{\mathbf{C}(X)}(P(X,Y), Q(X,Y))$. La fonction polynômiale de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{C}$ associée à R sera notée $R(z)$. On suppose que $n = d(P)$ et $m = d(Q)$. Montrer que $\frac{R(z)}{z^{d(P)d(Q)}}$ admet une limite dans $\mathbf{C}$ lorsque $\mid z \mid \to \infty$.

IV-5- On suppose que P et Q vérifient *(C1)* et *(C2)*. Montrer que le nombre de solutions du système est inférieur ou égal au produit $d(P)d(Q)$.

IV-6- Le système d'équations proposé a-t'il toujours $d(P)d(Q)$ solutions lorsque P et Q satisfont *(C1)* et *(C2)* ?